



TITLE:

モンテカルロ積分における2分法 (サンプリングの数理的研究)

AUTHOR(S):

丘本, 正

CITATION:

丘本, 正. モンテカルロ積分における2分法 (サンプリングの数理的研究). 数理解析研究所講究録 1976, 272: 124-130

ISSUE DATE:

1976-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105934>

RIGHT:

モンテカルロ積分における二分法

阪大 基礎工 丘本 正

1. 序. S 次元空間内の有限区間 G_S の上で定義された実数値関数 f が与えられ, 最初 $f(x)$ の値は未知であるが, G_S 内の任意の点 x において, 誤差なしに観測できるものとする. モンテカルロ積分とは, 適当に確率的に定められた N 個の点 x において $f(x)$ の値を観測することにより, 未知母数

$$I = \int_{G_S} f(x) dx$$

を推定する問題である (Hammersley & Handscomb (1964)). この問題は Kitagawa (1950) ではランダム積分と呼ばれ, また連続母集団からの標本調査と解釈することもできる.

I を推定するために, これまでいろいろな方法が提本された. 単純ランダム法, 補助情報を利用する Hammersley & Morton (1956) の antithetic 法, Haber (1966, 1967) のメッシュ法, 1次元の場合に順序統計量を利用する Fukuba

et al (1974) の方法など。ここでは f が連続的微分可能な場合に利用できる2分法を提出しよう。

2. いくつかのモンテカルロ推定量。一般性を失なうことなく、 G_S は単位立方体 $[0, 1]^S$ とする。単純ランダム推定量

$$J_0 = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N f(x_r)$$

においては、 x_r は i. i. d. であり、集合 G_S 上の一様分布 $U(G_S)$ に従う。 J_0 は I の不偏推定量であって、分散は

$$\text{var}(J_0) = \frac{1}{N} \left(\int_{G_S} f^2 - I^2 \right)$$

である。

G_S の x^i 軸 ($i=1, \dots, S$) に沿う辺を n_i 個の線分に等分することによって得られる合同な部分区間を A_r ($r=1, \dots, N$) とする。ここに $N = n_1 \dots n_S$ 。 C_r は A_r の中心、 x_r を互いに独立に A_r の中でランダムに取った点とし、

$$x_r' = 2C_r - x_r$$

とする。Haber (1966, 1967) は f のそれぞれ $N, 2N$ 回の観測に基づく I の不偏推定量として

$$J_1 = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N f(x_r)$$

$$J_2 = \frac{1}{2N} \sum_{r=1}^N \{ f(x_r) + f(x'_r) \}$$

を提出した。 G_s 上で定義され、 k 次の連続な偏導関数をもつ実数値関数の全体を C^k ($k=1, 2$) で表わす。以下 $N \rightarrow \infty$ といえは、 $n = \min(n_1, \dots, n_s) \rightarrow \infty$ と意味するものとする。Haber は $f \in C^k$ ($k=1, 2$) のとき

$$\text{var}(J_k) = \tau_N^2(J_k) + o((Nn^{2k})^{-1}), \quad (N \rightarrow \infty)$$

であることを示した。ここに

$$\tau_N^2(J_1) = \frac{1}{12N} \sum_{i=1}^s \frac{1}{n_i^2} \int_{G_s} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^2$$

$$\tau_N^2(J_2) = \frac{1}{1440N} \left\{ 2 \sum_{i=1}^s \frac{1}{n_i^4} \int \left(\frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2} \right)^2 + 5 \sum_{i \neq j=1}^s \frac{1}{(n_i n_j)^2} \int \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)^2 \right\}$$

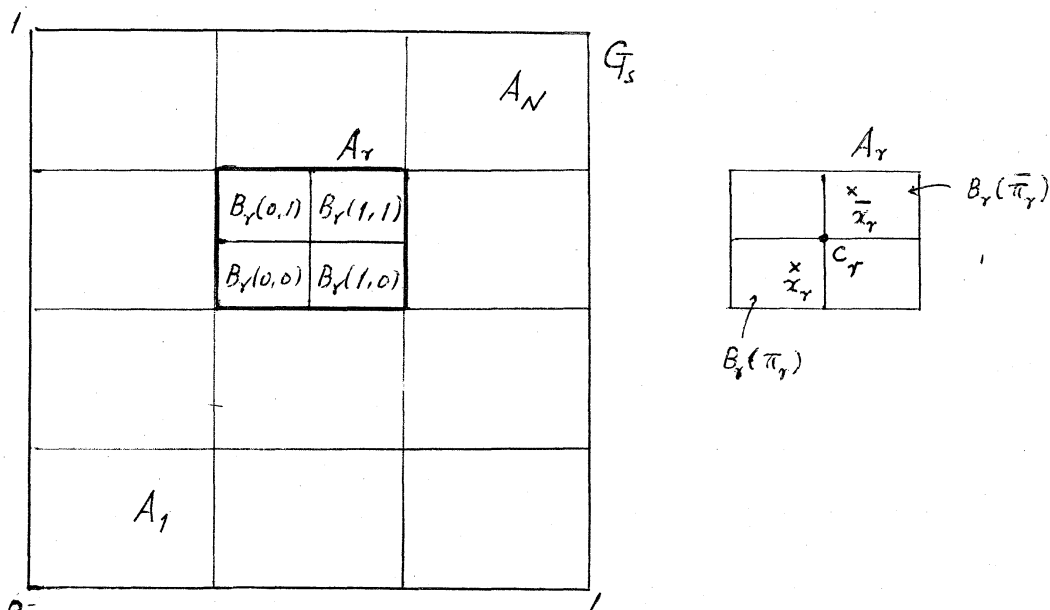
3. 二分法. 前節で G_s を N 個の部分区間 A_r に分割したが、各 A_r の各辺をさらに二分することによって、これらを 2^s 個の部分区間 $B_r(\pi)$ に分割しよう。ここに

$$\pi = (\pi^1, \dots, \pi^s), \quad \pi^i = 0 \text{ または } 1 \quad (i=1, \dots, s).$$

π を $B_r(\pi)$ の位置とよび、 $\pi = (0, \dots, 0), (1, \dots, 1)$ はそれぞれ‘左下’、‘右上’の部分区間を表わすように自然な対応を定めおく。 Π で 2^s 個の π 全体を表わすことに

し、 π と $\bar{\pi} = (\bar{\pi}^1, \dots, \bar{\pi}^s)$ は $\pi^i + \bar{\pi}^i = 1$ ($\forall i$) のとき、
相補的 (complementary) と呼ぶことにする。

二分法推定量 J_B は次のように定義される。まず Π から



ランダムに、かつ互いに独立に N 個の位置 π_1, \dots, π_N を取り出し、次にそれらの相補 (complement) $\bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_N$ を取る。これら $B_r(\pi_r)$, $B_r(\bar{\pi}_r)$ が定まるから、それらの中からランダムに、かつ互いに独立に取った点をそれぞれ x_r , \bar{x}_r とする。このとき

$$J_B = \frac{1}{2N} \sum_{r=1}^N \{ f(x_r) + f(\bar{x}_r) \}$$

とする。Haber の J_2 においては、 x_r' は x_r から完全に定まるが、 J_B においては $\underbrace{x_r'}_{\bar{x}_r}$ ランダム性が残っている。

定理 1.

$$(i) \quad E(J_B) = I$$

$$(ii) \quad f \in C^1 \text{ ならば, } \text{var}(J_B) = \tau_N^2(J_B) + o((Nn^2)^{-1}) \\ (N \rightarrow \infty), \quad \text{ここに}$$

$$\tau_N^2(J_B) = \frac{1}{96N} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{n_i^2} \int_{G_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^2$$

$$(iii) \quad J_B \text{ は } N \rightarrow \infty \text{ のとき漸近的に } N(I, \tau_N^2(J_B)) \text{ に従} \\ \text{う}.$$

J_B の分散を推定するために

$$D_B^2 = \frac{1}{28N^2} \sum_{r=1}^N \{f(x_r) - f(\bar{x}_r)\}^2$$

を定義する.

定理 2. $f \in C^1$ ならば

$$E(D_B^2) = \tau_N^2(J_B) + o((Nn^2)^{-1}) \quad (N \rightarrow \infty)$$

かつ D_B^2 は $N \rightarrow \infty$ のとき漸近的に平均 $\tau_N^2(J_B)$, 適当な分散をもつ正規分布に従う.

注意 1. J_B, J_1 はともに不偏であり, かつ仮定 $f \in C^1$ の下で漸近正規であり, J_B は J_1 より漸近分散が小さいから, I の推定量として J_B は J_1 より良い. もつとも J_B, J_1

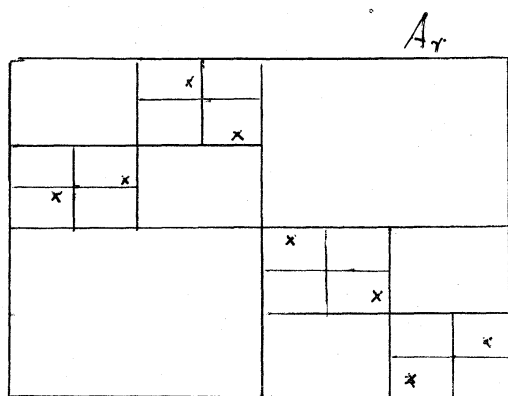
はそれぞれ $2N$, N 回の観測に基づいていゝから, 単に $T_N^2(J_B)$ と $T_N^2(J_1)$ と比較するのは不公平であつて, 観測回数それぞれを修正が必要である. 逆に, 漸近分散が一致するようにして, 観測回数の比を取れば, J_B の J_1 に対する漸近相対効率 ARE は

$$ARE = 2^{2(s-1)/(s+1)}$$

となり, 1 以上である.

注意 2. J_2 は仮定 $f \in C^2$ を要求するが, この仮定の下では J_2 は J_B より良い. 漸近分散の次数が高いからである.

注意 3. 2 分法のアイデアを多段 2 分法に拡張することができる. 各段階ごとに 2^s 個の部分区間から 2 個の相称の位置を選ぶことにより, p 段階ならば $2^p N$ 回の観測に基づくことになる. 段階数が増すにつれ, しばらくは J_B の漸近分散が減少するが, やがて $(Nn^4)^{-1}$ のオーダーの項において増加し始める. 3 段階より多くすることは無理なやうである.



3 段階 2 分法

参考文献

- [1] Fukuba, Y., Ito, K. & Tabata, Y. (1974). A probabilistic approach to the extreme-search method. Third Osaka Manag. Sci. Colloquium.
- [2] Haber, S. (1966). A modified Monte-Carlo quadrature. Math. Comp. 19 361-368.
- [3] Haber, S. (1967). A modified Monte-Carlo quadrature. II. Math. Comp. 21 388-397.
- [4] Hammersley, J. M. & Handscomb, D. C. (1964). Monte Carlo Methods. London, Methuen.
- [5] Hammersley, J. M. & Morton, K. W. (1956). A new Monte Carlo technique: antithetic variates. Proc. Camb. Phil. Soc. 52 449-475.
- [6] Kitagawa, T. (1950). Random integrations. Bull. Math. Statist. 4
- [7] Okamoto, M. Asymptotic normality in Monte Carlo integration (投稿中).